16

Demostración de teoremas importantes

16.1 INTRODUCCIÓN

Los teoremas demostrados en este capítulo se consideran los más importantes en la secuencia lógica de la geometría. Son los siguientes:

1. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. (Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.)

2. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°.

3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

4. Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno de ellos es congruente con las partes correspondientes del otro.

5. Un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta tanto a la cuerda como a sus arcos.

6. Un ángulo inscrito en un círculo se mide como la mitad de su arco interceptado.

7. El ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan dentro de un círculo, se mide como la mitad de la suma de los arcos interceptados.

8*a*. Un ángulo formado por dos secantes que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

8*b*. Un ángulo formado por una tangente y una secante que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

8*c*. Un ángulo formado por dos tangentes que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

9. Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares.

10. Si se dibuja la altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo (o recto), se tiene que: (*a*) los dos triángulos así formados son similares al triángulo dado y también son similares entre sí, y (*b*) cada cateto del triángulo dado es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

11. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo recto, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.

12. El área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

13. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

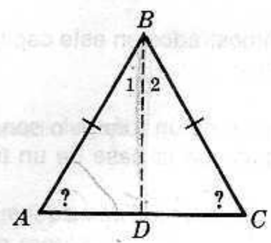
14. El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto de la longitud de la altura por la suma de las longitudes de las bases.

15. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la longitud de su apotema.

16.2 LAS DEMOSTRACIONES

1. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. (Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.)

Dado: $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle C$
Plan: cuando se dibuja el bisector de un ángulo en un vértice se tiene que los ángulos por demostrar que son congruentes, se convierten en ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

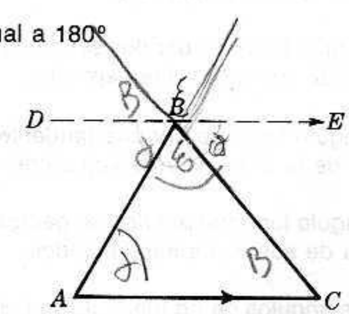


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$	1. Un ángulo puede ser bisectado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. Dado.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle ADB \cong \triangle BDC$	5. s.a.s. ≅ s.a.s.
6. $\angle A \cong \angle C$	6. Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

2. La suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es igual a 180°.

Dado: $\triangle ABC$
Demuéstrese: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$
Plan: cuando se dibuja una línea que pasa por un vértice y que es paralela al lado opuesto, se forma un ángulo derecho cuyas partes, es posible demostrar, son congruentes a los ángulos del triángulo.

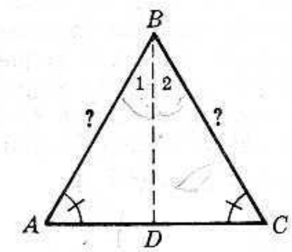


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Por B dibujar $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$	1. Por un punto externo se puede dibujar una línea paralela a otra dada.
2. $m\angle DBE = 180°$	2. Un ángulo derecho es aquel que mide 180°.
3. $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180°$	3. El total es igual a la suma de sus partes.
4. $\angle A \cong \angle DBA$, $\angle C \cong \angle CBE$	4. Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.
5. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	5. Postulado de sustitución.

3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Dado: $\triangle ABC$, $\angle A \cong \angle C$
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
Plan: cuando se dibuja el bisector del $\angle B$, los lados que se van a demostrar como congruentes se convierten en los lados correspondientes de triángulos congruentes.

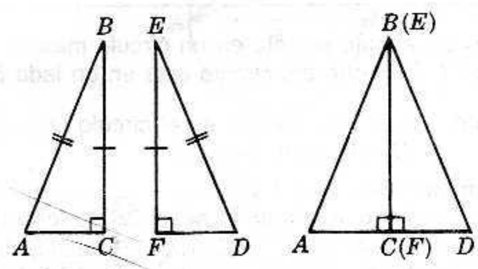


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{BD}$ bisectando $\angle B$	1. Un ángulo puede ser bisectado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\angle A \cong \angle C$	3. Dado.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle BDA \cong \triangle BDC$	5. s.a.a. $\cong$ s.a.a.
6. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	6. Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

4. Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno de ellos es congruente con las partes correspondientes del otro.

Dado: $\triangle ABC$ recto con ángulo recto en C
$\triangle DEF$ recto con ángulo recto en F
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
Plan: Júntense los dos triángulos dados de modo que $\overline{BC}$ coincida con $\overline{EF}$ y formen un triángulo isósceles. Se demuestra entonces, mediante el teorema 1 y con s.a.a. $\cong$ s.a.a., que los triángulos dados son congruentes.



DEMOSTRACIÓN:

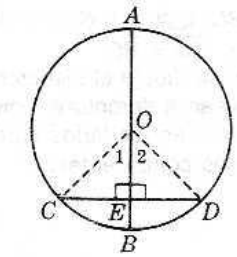
Proposición	Argumento
1. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. Dado.
2. Júntense los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ de manera que $\overline{BC}$ coincida con $\overline{EF}$, y que A y D estén en lados opuestos de $\overline{BC}$.	2. Una figura geométrica puede ser movida sin cambiar su tamaño o forma. Las líneas que son iguales pueden hacerse coincidir.
3. $\angle C$ y $\angle F$ son rectos	3. Dado.
4. $\angle ACD$ es derecho	4. El total es igual a la suma de sus partes.
5. $\overline{AD}$ es un segmento de línea recta.	5. Los lados de un ángulo derecho están en una línea recta.
6. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	6. Dado.
7. $\angle A \cong \angle D$	7. Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados, son congruentes.
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8. s.a.a. $\cong$ s.a.a.

5. Un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta tanto a la cuerda como a sus arcos.

Dado: círculo O, diámetro $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

Demuéstrese: $\overline{CE} \cong \overline{ED}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{BD}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{AD}$

Plan: se forman triángulos congruentes cuando se dibujan radios a C y D, lo que demuestra que $\overline{CE} \cong \overline{ED}$. Los ángulos centrales iguales se usan para demostrar que $\widehat{BC} \cong \widehat{BD}$; finalmente se usa el postulado de sustracción para demostrar que $\widehat{AC} \cong \widehat{AD}$.



DEMOSTRACIÓN:

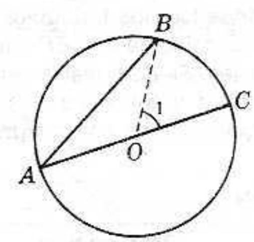
Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$	1. Una línea recta puede dibujarse entre dos puntos.
2. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$	3. Dado.
4. $\angle OEC$ y $\angle OED$ son rectos	4. Las perpendiculares hacen ángulos rectos.
5. $\overline{OE} \cong \overline{OE}$	5. Propiedad reflexiva.
6. $\triangle OEC \cong \triangle OED$	6. hipotenusa, cateto $\cong$ hipotenusa, cateto.
7. $\overline{CE} \cong \overline{ED}$, $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las partes correspondientes de triángulos congruentes, son congruentes.
8. $\widehat{CB} \cong \widehat{BD}$	8. En un círculo, ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.
9. $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$	9. Un diámetro bisecta a un círculo.
10. $\widehat{AC} \cong \widehat{AD}$	10. En un círculo arcos congruentes son arcos iguales; postulado de sustracción.

6. Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad de su arco interceptado.
Caso I: El centro del círculo está en un lado del ángulo.

Dado: $\angle A$ está inscrito en el círculo O.
O está en el lado AC.

Demuéstrese: $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$

Plan: cuando se dibuja el radio $\overline{OB}$ se forma el triángulo isósceles $\triangle AOB$. Se demuestra entonces que $m\angle A$ es la mitad del $\angle 1$ central, el cual está determinado por la medida de $\widehat{BC}$.



DEMOSTRACIÓN:

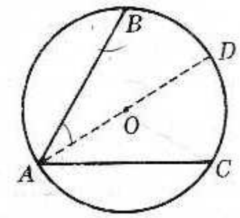
Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{OB}$	1. Se puede dibujar una línea recta que pase por dos puntos.
2. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\angle A \cong \angle B$	3. Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
4. $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$	4. En un triángulo, la medida de un triángulo externo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos adjuntos.
5. $m\angle A + m\angle A = 2m\angle A = m\angle 1$	5. Postulado de sustitución.
6. $m\angle A = \frac{1}{2} m\angle 1$	6. Las mitades de iguales son iguales.
7. $\angle 1 \doteq \widehat{BC}$	7. Un ángulo central se mide por su arco interceptado.
8. $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$	8. Postulado de sustitución.

Caso II: el centro está dentro del ángulo.

Dado: $\angle BAC$, inscrito en el círculo O.
O está dentro $\angle BAC$.

Demuéstrese: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$

Plan: cuando se dibuja un diámetro, el $\angle BAC$ se divide en dos ángulos que pueden ser medidos mediante la aplicación del *Caso I*.



DEMOSTRACIÓN:

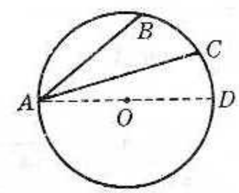
Proposición	Argumento
1. Dibújese el diámetro $\overline{AD}$	1. Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$ $\angle DAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{DC}$	2. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado, si el centro del círculo está a un lado del ángulo.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{DC}$ o $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{DC})$	3. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$	4. Postulado de sustitución.

Caso III: el centro está afuera del ángulo.

Dado: $\angle BAC$ está inscrito en el círculo O.
O está afuera de $\angle BAC$.

Demuéstrese: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$

Plan: cuando se dibuja un diámetro, $\angle BAC$ se convierte en la diferencia de dos ángulos que pueden ser medidos aplicando el *Caso I*.



DEMOSTRACIÓN:

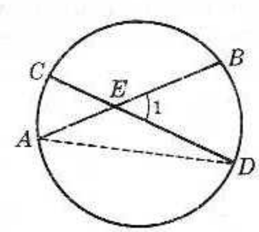
Proposición	Argumento
1. Dibújese el diámetro $\overline{AD}$	1. Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$ $\angle CAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{CD}$	2. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado, si el centro del círculo está a un lado.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} - \frac{1}{2}\widehat{CD}$ o $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{CD})$	3. Si iguales se restan a iguales, las diferencias son iguales.
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$	4. Postulado de sustitución.

7. El ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan dentro de un círculo mide la mitad de la suma de los arcos interceptados.

Dado: $\angle 1$ está formado por las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ las que se intersectan en E dentro del círculo O.

Demuéstrese: $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$

Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el ángulo $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo de un triángulo cuyos ángulos internos no adyacentes son ángulos inscritos medidos por $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ y $\frac{1}{2}\widehat{BD}$.



DEMOSTRACIÓN:

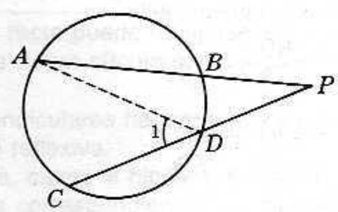
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle D$	2. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes.
3. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$, $\angle D \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$	3. Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad de su arco interceptado.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{AC} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{AC})$	4. Postulado de sustitución.

8a. Un ángulo formado por dos secantes que se intersectan afuera de un círculo, mide la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$, formado por la intersección en P de las secantes $\overline{PBA}$ y $\overline{PDC}$, donde P es un punto afuera del círculo O.

Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

Plan: cuando se dibuja $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$, del que $\angle P$ es un ángulo interno no adjunto.



DEMOSTRACIÓN:

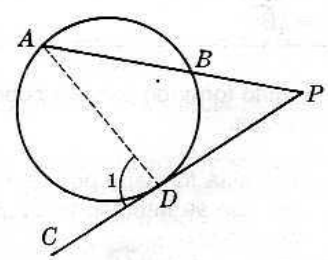
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. La medida de un ángulo externo a un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. Postulado de la sustracción.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$, $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$	4. Un ángulo inscrito en un círculo se mide por la mitad de su arco interceptado.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC} - \frac{1}{2}\widehat{BD}$ o $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$	5. Postulado de sustitución.

8b. Un ángulo formado por una secante y una tangente que se intersectan afuera de un círculo, se mide por la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$ formado por la intersección en P de la secante $\overline{PBA}$ y la tangente $\overline{PDC}$, donde P es un punto afuera del círculo O.

Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$; del que los $\angle P$ y $\angle R$ son ángulos internos no adjuntos.



DEMOSTRACIÓN:

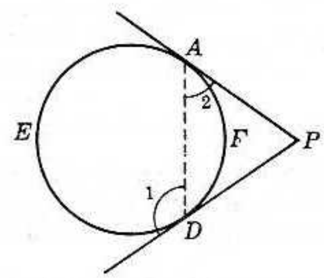
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$ 2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$ 3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$ 4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ 5. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 6. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ o $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD})$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta. 2. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos. 3. Postulado de la sustracción. 4. Un ángulo formado por una tangente y una cuerda se mide por la mitad de su arco interceptado. 5. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado. 6. Postulado de sustitución

8c. Un ángulo formado por dos tangentes que se intersectan afuera de un círculo mide la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$, formado por la intersección en P de las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$, donde P es un punto afuera del círculo O.

Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AED} - \overset{\frown}{AFD})$

Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$, del que $\angle P$ y $\angle 2$ son ángulos internos no adjuntos.



DEMOSTRACIÓN:

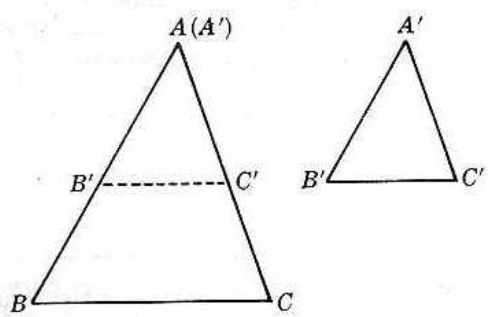
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$ 2. $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 1$ 3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle 2$ 4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{AED}$, $\angle 2 \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{AFD}$ 5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{AED} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AFD}$ o $\angle P \doteq {}^{1}(\overset{\frown}{AED} - \overset{\frown}{AFD})$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta 2. La medida de un ángulo externo de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos. 3. Postulado de la sustracción. 4. Un ángulo formado por una tangente y una cuerda se mide por la mitad de su arco interceptado. 5. Postulado de sustitución.

9. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares.

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$
$\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$

Demuéstrese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Plan: para demostrar que los triángulos son similares, es necesario demostrar que los lados correspondientes son proporcionales entre sí. Esto se hace colocando a los triángulos de tal manera que coincida una pareja de ángulos congruentes; esto se repite hasta que otra pareja de ángulos congruentes coincida.



DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. $\angle A \cong \angle A'$	1. Dado.
2. Colóquese al $\triangle A'B'C'$ sobre $\triangle ABC$ de modo que $\angle A'$ coincida con $\angle A$.	2. Una figura geométrica puede ser movida sin cambiar su tamaño o su forma. Se puede hacer coincidir con ángulos que sean iguales.
3. $\angle B \cong \angle B'$	3. Dado.
4. $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$	4. Dos líneas son paralelas si sus ángulos correspondientes son congruentes.
5. $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$	5. Una línea paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos de manera proporcional.
6. De manera semejante, al colocar $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$ de modo que $\angle B'$ coincida con B, se demuestra que $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$	6. Puntos 1 a 5.
7. $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$	7. Cosas (proporciones) iguales a la misma cosa, son iguales entre sí.
8. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$	8. Dos polígonos son similares si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

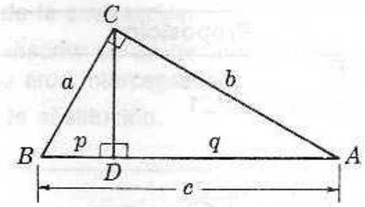
10. Si se dibuja la altura a la hipotenusa de un triángulo recto, entonces: (*a*) los dos triángulos así formados son similares entre sí, al igual que al triángulo dado; (*b*) cada cateto del triángulo dado es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

Dado: $\triangle ABC$ con un ángulo recto en C, altura $\overline{CD}$ a la hipotenusa $\overline{AB}$

Demuéstrese: (*a*) $\triangle ADC \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$

(*b*) $c{:}a = a{:}p$; $c{:}b = b{:}q$

Plan: los triángulos son similares ya que tienen un ángulo recto y una pareja de ángulos agudos congruentes. Las proporciones son consecuencia de la similitud de los triángulos.

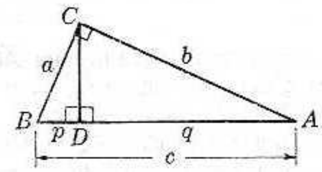


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. $\angle C$ es un ángulo recto	1. Dado.
2. $\overline{CD}$ es la altura a $\overline{AB}$	2. Dado.
3. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	3. Una altura a un lado de un triángulo es perpendicular a ese lado.
4. $\angle CDB$ y $\angle CDA$ son rectos	4. Las perpendiculares forman ángulos rectos entre sí.
5. $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle B$	5. Propiedad reflexiva.
6. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$	6. Dos triángulos rectos son similares si un ángulo agudo de uno de ellos es congruente con un ángulo agudo del otro.
7. $\triangle ADC \sim \triangle BDC$	7. Dos triángulos similares al mismo triángulo son similares entre sí.
8. $c{:}a = a{:}p$, $c{:}b = b{:}q$	8. Lados correspondientes de triángulos similares, son proporcionales.

11. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Dado: $\triangle ABC$ rectángulo, con ángulo recto en C. Los catetos tienen longitudes a, b y la hipotenusa tiene longitud c.
Demuéstrese: $c^2 = a^2 + b^2$
Plan: Dibújese $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y aplíquese el teorema 10.

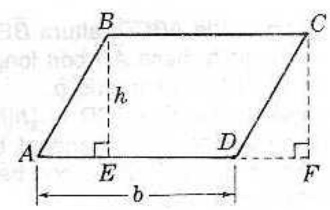


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	1. Desde un punto externo, se puede dibujar una perpendicular a una línea dada.
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}, \frac{c}{b} = \frac{b}{q}$	2. Si se dibuja una altura a la hipotenusa de un triángulo recto, cualquiera de los catetos es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto y la hipotenusa.
3. $a^2 = cp$, $b^2 = cq$	3. En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.
4. $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q)$	4. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
5. $c = p + q$	5. El total es igual a la suma de sus partes.
6. $a^2 + b^2 = c(c) = c^2$	6. Postulado de sustitución.

12. El área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura a ese lado.

Dado: $\square ABCD$, longitud de la base $\overline{AD} = b$, longitud de la altura $\overline{BE} = h$
Demuéstrese: Área de $ABCD = bh$
Plan: cuando se dibuja una perpendicular a la base, extendida, se forma un rectángulo que tiene la misma base y altura que el paralelogramo. Mediante la adición de triángulos congruentes a un área común, se demuestra que el rectángulo y el paralelogramo tienen la misma área.

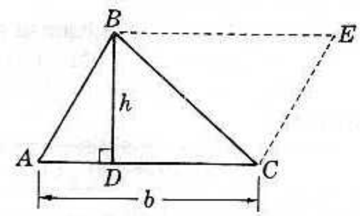


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{CF} \perp \overline{AD}$ (extendida)	1. Desde un punto externo se puede dibujar una perpendicular a una línea dada.
2. $\overline{CF} \parallel \overline{BE}$	2. Los segmentos perpendiculares a la misma línea son paralelos.
3. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	3. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.
4. $\angle CFD$ y $\angle BEA$, ángulos rectos	4. Las perpendiculares forman ángulos rectos.
5. $BCFE$ es un rectángulo	5. Un paralelogramo con un ángulo recto, es un rectángulo.
6. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CF} \cong \overline{BE}$	6. Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
7. $\triangle ABE \cong \triangle CFD$	7. hipotenusa cateto $\cong$ hipotenusa cateto
8. Área (cuadrilátero $BCDE$) = Área (cuadrilátero $BCDE$)	8. Propiedad reflexiva.
9. Área ($\triangle ABE$) + Área (cuadrilátero $BCDE$) = Área ($\triangle CFD$) + Área (cuadrilátero BCDE) o Área (rectángulo $BCFE$) = Área ($\square ABCD$)	9. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
10. Área del rectangulo $BCFE = bn$	10. El área de un rectángulo es igual al producto de las longitudes de su base y de su altura.
11. Área $\square ABCD = bh$	11. Postulado de sustitución.

13. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

Dado: $\triangle ABC$, longitud de la base $\overline{AC} = b$, longitud de la altura $\overline{BD} = h$
Demuéstrese: Área $\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$
Plan: al dibujar $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$, se forma un paralelogramo que tiene la misma base y altura que el triángulo dado. Por lo tanto, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

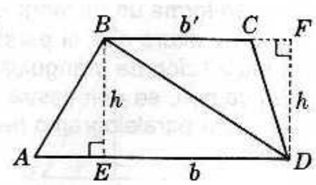


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújense $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$	1. Desde un punto externo se puede dibujar una línea paralela a otra dada.
2. $ABEC$ es un paralelogramo con base b y altura h	2. Un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos.
3. Área ($\triangle ABC$) $= \frac{1}{2}$ Área ($\square ABEC$)	3. Una diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.
4. Área ($\square ABEC$) $= bh$	4. El área de un paralelogramo es igual al producto de las longitudes de la base y de la altura.
5. Área del $\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$	5. Postulado de sustitución

14. El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto entre la longitud de la altura y la suma de las longitudes de las bases.

Dado: Trapezoide $ABCD$, altura $\overline{BE}$ con longitud h, base $\overline{AD}$ con longitud b, base $\overline{BC}$ con longitud b'.
Demuéstrese: Área de $ABCD = \frac{1}{2}h(b + b')$
Plan: cuando se dibuja una diagonal, el trapezoide se divide en dos triángulos con bases b, b' y con altura común a ambos.

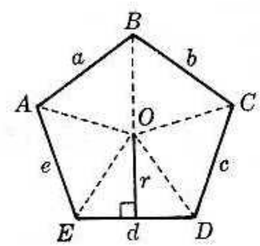


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{BD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. Dibujar $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$ (extendido)	2. Desde un punto externo, es posible dibujar una perpendicular a una recta dada.
3. $DF = BE = h$	3. Las líneas paralelas son equidistantes en todas partes.
4. Área ($\triangle ABD$) $= \frac{1}{2}bh$ Área ($\triangle BCD$) $= \frac{1}{2}b'h$	4. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de su base y altura.
5. Área de $ABCD = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}b'h = \frac{1}{2}h(b + b')$	5. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.

15. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la apotema.

Dado: Polígono regular *ABCDE*... con centro en *O*, apotema de longitud *r*, perímetro *p*.
Demuéstrese: Área de *ABCDE*... = $\frac{1}{2}rp$
Plan: al unir todos y cada uno de los vértices con el centro, se obtienen triángulos congruentes, la suma de cuyas áreas es igual al área del polígono regular.



DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújense $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, ...	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. La altura de cada triángulo así formado es *r*	2. Las apotemas de polígonos regulares son congruentes.
3. Área de $\triangle AOB = \frac{1}{2}ar$ $\triangle BOC = \frac{1}{2}br$ $\triangle COD = \frac{1}{2}cr$	3. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de su base y altura.
4. Área del polígono regular $ABCDE... = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + ...$ $= \frac{1}{2}r(a + b + c + ...)$	4. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
5. $p = a + b + c + ...$	5. El todo es igual a la suma de sus partes.
6. Área de $ABCDE... = \frac{1}{2}rp$	6. Postulado de sustitución